3.3 Jednoduché reálne rôzne vlastné hodnoty

Nech vlastný vektor $\mathbf{r}_i$ odpovedá vlastnej hodnote λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$), t.j.

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i,\ i = 1,2,\ldots,n$$

potom vektorové funkcie

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t},\ i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.14)$$

sú lineárne nezávislé riešenia a všeobecné riešenie (3.8) má tvar

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{r}_i e^{\lambda_i t},$$

kde C_i, $i = 1,2,\ldots,n$, sú ľubovoľné konštanty.

Príklad *Nájdime všeobecné riešenie nasledujúceho systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 - x_3, \\ x_3' &= x_1 - x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Riešenie: Vzhľadom na (3.10), dostávame

$$\begin{aligned} (2-\lambda)\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + (2-\lambda)\beta - \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta + (2-\lambda)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Potom charakteristická rovnica je

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & 1 \\ 1 & (2-\lambda) & -1 \\ 1 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

má korene $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Vlastný vektor $\mathbf{r}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ odpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda_1 = 1$ je jedno z nenulových riešení systému (3.15) pre $\lambda = \lambda_1 = 1$. Odtiaľ

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Jedno riešenie sústavy rovníc ja napríklad $\mathbf{r}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T = (0,1,1)$. Potom vzhľadom na (3.14) vektorová funkcia

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{1\cdot t}$$

je jedným riešením daného systému diferenciálnych rovníc.

Podobne dostaneme

$$\mathbf{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2\cdot t}, \ \mathbf{u}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3\cdot t}.$$

Potom fundamentálna matica $\mathbf{U}$ riešení daného systému je

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^{t} & e^{2t} & 0 \\ e^{t} & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Všeobecné riešenie je

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^{t} & e^{2t} & 0 \\ e^{t} & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

kde C_1, C_2, C_3 sú ľubovoľné konštanty.

Poznámka: *Keď použijeme:*

- *MAPLE, dostaneme fundamentálnu maticu nasledovným postupom:*

```
with(DEtools):
A := matrix(3,3,[2,-1,1,1,2,-1,1,-1,2]);
U := matrixDE(A,t);
```

$$U = \begin{bmatrix} e^{(3t)} & e^{(2t)} & 0 \\ 0 & e^{(2t)} & e^{t} \\ e^{(3t)} & e^{(2t)} & e^{t} \end{bmatrix}$$

```
> with(DEtools):
A := matrix(3,3,[2,-1,1,1,2,-1,1,-1,2]);
U := matrixDE(A,t);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U := \left[\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{(3t)} & \mathbf{e}^{(2t)} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{(2t)} & \mathbf{e}^{t} \\ \mathbf{e}^{(3t)} & \mathbf{e}^{(2t)} & \mathbf{e}^{t} \end{bmatrix}, [0, 0, 0] \right]$$

```
> riesenie:=matrix([[exp(3*t), exp(2*t), 0], [0, exp(2*t),
exp(t)], [exp(3*t), exp(2*t), exp(t)]])*matrix(3,1,[C1,C2,C3]);
```

$$riesenie := \begin{bmatrix} e^{(3t)} & e^{(2t)} & 0 \\ 0 & e^{(2t)} & e^{t} \\ e^{(3t)} & e^{(2t)} & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{bmatrix}$$

- MATLAB, *dostaneme vlastné hodnoty a vlastné vektory nasledovným postupom:*

```
>>A=[2,-1,1;1,2,-1;1,-1,2]
   A =    2   -1    1
          1    2   -1
          1   -1    2

>> [vlastné vektory, vlastné hodnoty]=eig(A)
vlastné vektory  =    0.5774   0.0000   0.7071
                      0.5774  -0.7071   0.0000
                      0.5774  -0.7071   0.7071

vlastné hodnoty =     2.0000        0         0
                         0     1.0000         0
                         0          0    3.0000
```

  - Riešenie pomocou exponenciálu matice:

```
>> exponentialA=expm(A*t)

exponentialA=

[             exp(2*t),      -exp(3*t)+exp(2*t),       exp(3*t)-exp(2*t)       ]
[       exp(2*t)-exp(t),              exp(2*t),       -exp(2*t)+exp(t)          ]
[       exp(2*t)-exp(t),      -exp(3*t)+exp(2*t), exp(3*t)-exp(2*t)+exp(t)]
```

Exponenciál matice je tiež fundamentálnou maticou riešení.

```
>>  syms t C1 C2 C3
>> riesenie=expm(A*t)*[C1;C2;C3]

riesenie =

                exp(2*t)*C1+(-exp(3*t)+exp(2*t))*C2+(exp(3*t)-exp(2*t))*C3
                  (exp(2*t)-exp(t))*C1+exp(2*t)*C2+(-exp(2*t)+exp(t))*C3
  (exp(2*t)-exp(t))*C1+(-exp(3*t)+exp(2*t))*C2+(exp(3*t)-exp(2*t)+exp(t))*C3
```

  - Ďalšie možné riešenie pomocou MATLABu

```
>> [x1,x2,x3]=dsolve('Dx1=2*x1-x2+x3, Dx2 =x1+2*x2-x3,Dx3 =x1-x2+2*x3')

x1 =
C2*exp(2*t)+C3*exp(3*t)
x2 =
C2*exp(2*t)+exp(t)*C1
 x3 =
C3*exp(3*t)+C2*exp(2*t)+exp(t)*C1
```